Nachhilfestunde 5

$$f(x) = \left(e^x - 2\right)^2$$

Zur Untersuchung einer Exponential-Funktion mit Dreiecksinhalt und Integralfläche

Niveau: Gymnasium

KEIN ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 45055

Stand 4. März. 2025

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

https://mathe-cd.de

VORWORT

In dieser Nachhilfestunde, die in 7 Abschnitte gegliedert ist, geht es um die Funktion $f_k(x) = (e^x - 2)^2$. Wir besprechen ausführlich grundlegende Methoden.

Die Lösungen sind teilweise anspruchsvoll!

Wichtige Fakten werden als Grundwissen mit $\boxed{\text{GW}}$ gekennzeichnet.

Und das sind die besprochenen Themen bzw. Methoden:

$\boxed{1}$ Nullstellen von $f_k(x) = (e^x - 2)^2$. Umformung von $\mathbf{e^x = 2}$ nach $\mathbf{x_N = \ln(2)}$

$\boxed{2}$ Drei Ableitungen berechnen: Kettenegel und Substitution.

$\boxed{3}$ Extrempunkte berechnen. Beweis von $e^{\ln(2)} = 2$ und $e^{2 \cdot \ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 = 2^2 = 4$

$\boxed{4}$ Wendepunkte berechnen

$\boxed{5}$ Fläche zwischen K und Asymptote mit Integral berechnen.

$\boxed{6}$ und $\boxed{7}$ Fläche ins Unendliche fortsetzen

1 Willkommen bei einer neuen Funktion:

Es geht jetzt um diese Funktion: $f(x)=(e^x-2)^2$

GW Umformungen:

Man kann die Klammer auch mit der 2. binomischen Formel ausmultiplizieren.

Diese heißt $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Dann heißt die Funktion so: $f(x)=(e^x)^2-4\cdot e^x+4$

Dabei sollte man wissen: $(e^x)^2=e^{2x}$.

Dann kann f man auch so schreiben: $f(x)=e^{2x}-4\cdot e^x+4$

GW Berechnung der Nullstellen von f_k:

Bedingung: $f(x)=0$ d. h. $(e^x-2)^2=0$ (*)

Also folgt $e^x-2=0 \Leftrightarrow$ $e^x=2$

Die Auflösung nach x schreibt man so auf: $x_N=\ln(2)$

Man nennt den Exponenten von e^x den natürlichen Logarithmus vom Ergebnis x.

: $e^x=2$ führt zu $x=\ln(2)$.

Mit dem Taschenrechner erfährt man dann $\ln(2)\approx 10{,}69$

Ergebnis: f hat die Nullstelle $x_N=\ln(2)$.
Und der Graph K von f *„schneidet“* die x-Achse in $N(\ln(2)\,|\,0)$

Hinweis: Aus (*) geht hervor, dass ln(2) eine <u>doppelte Nullstelle</u> ist. Das deutet hier schon darauf hin, dass die Kurve K in der Nullstelle die x-Achse berührt! Dort liegt also ein Extrempunkt. Das entdecken wir in 3 noch einmal auf andere Weise.

Als nächstes wollen wir drei Ableitungen berechnen.

Dabei haben wir zwei Möglichkeiten:

$f_k(x)=(e^x-2)^2$ oder $f_k(x)=e^{2x}-2\cdot e^x+4$.

Kannst du diese Funktionen ableiten?

Schreibe es auf!

Meine Lösung folgt in Abschnitt $\Rightarrow$ 2

2 Wir machen jetzt einige Ableitungsübungen:

GW

(1) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

(2) $f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = e^{2x} \cdot 2$ Also „mal die innere Ableitung“

(3) $f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$

(4) $f(x) = e^{4-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{4-x}$ Auch hier „mal die innere Ableitung.

(5) $f(x) = e^{z(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{z(x)} \cdot z'(x)$ Ebenso

$f(x) = (e^x - 2)^2$ Durch eine **Substitution** vereinfacht man den Funktionsterm:

Setze $z = e^x - 2 \Rightarrow f(x) = z^2$

Dann folgt nach der Kettenregel: $f'(x) = 2z \cdot z'$

Also wird z^2 abgeleitet zu 2z und dann noch „mal innere Ableitung“.

Dann macht man die Substitution rückgängig:

Aus $f'(x) = 2z \cdot z'$ wird $f'(x) = 2(e^x - 2) \cdot e^x$

denn aus $z = e^x - 2$ folgt $z' = e^x$.

Kurz: $f(x) = (\underbrace{e^x - 2}_{z})^2 \Rightarrow f'(x) = 2z \cdot z' \Leftrightarrow f'(x) = 2(e^x - 2) \cdot e^x$

Für die 2. Ableitung fassen wir $f'(x)$ zusammen zu: $f'(x) = 2e^{2x} - 4e^x$

Dann ableiten: $f''(x) = \underbrace{2}_{KF} \cdot e^{2x} \cdot \underbrace{2}_{iA} - \underbrace{4}_{KF} \cdot e^x$

Dabei bedeuten: KF = Konstanter Faktor, iA = Innere Ableitung.

Also: $f_k''(x) = 4e^{2x} - 4e^x$

Und entsprechend die dritte Ableitung:

$f'''(x) = \underbrace{4}_{KF} e^{2x} \cdot \underbrace{2}_{iA} - \underbrace{4}_{KF} \cdot e^x$

Also: $f'''(x) = 8e^{2x} - 4 \cdot e^x$

Alternative: Man kann natürlich auch die ausmultiplizierte Funktion ableiten:

$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^x + 4$ statt $f(x) = (e^x - 2)^2$

Dann erhält man:

$f_k'(x) = e^{2x} \cdot 2 - 4 \cdot e^x = 2e^{2x} - 4e^x$

$f''(x) = 2e^{2x} \cdot 2 - 4 \cdot e^x = 4e^{2x} - 4e^x$

$f'''(x) = 4e^{2x} \cdot 2 - 4 \cdot e^x = 8e^{2x} - 4e^x$

Berechne jetzt die Extrempunkte des Schaubilds. $\Rightarrow$ 3

$\boxed{3}$ Berechnung der Extrempunkte

Dazu brauchen wir zwei Ableitungen aus $\boxed{2}$:

$$f(x) = \left(e^x - 2\right)^2 = e^{2x} - 4e^x + 4$$

$$f'(x) = 2\cdot\left(e^x - 2\right)\cdot e^x \quad \text{oder} \quad = 2e^{2x} - 4e^x$$

$$f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x$$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

1. Möglichkeit: $\Leftrightarrow \; 2\cdot\left(e^x - 2\right)\cdot\underbrace{e^x}_{\neq 0} = 0$ also $e^x = 2 \;\Leftrightarrow\; x_E = \ln(2)$

2. Möglichkeit: $\Leftrightarrow \; 2e^{2x} - 4\cdot e^x = 0$ | e^x ausklammern: $\underbrace{2e^x}_{\neq 0}\cdot\left(e^x - 2\right) = 0$

Also folgt $e^x = 2 \;\Leftrightarrow\; x_E = \ln(2)$

Hinreichende Bedingung: $f''(\ln(2)) = 4e^{2\cdot\ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = ???$

$\boxed{\text{GW}}$ Hier sehen wir zwei Terme, mit denen manche nichts anfangen können:

(1) Was ist $e^{\ln(2)} = ?$

Du weißt doch: Die Lösung von $e^x = 2$ schreibt man als $x = \ln(2)$.

Ersetzt man x damit, folgt: $e^{\ln(2)} = 2$ ***Das ist sehr wichtig!***

(2) Was ist $e^{2\cdot\ln(2)} = ?$ Zuerst schreibt man $e^{2\cdot\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2$

Dann ersetzt man nach (1): $e^{2\cdot\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 = 2^2 = 4$

Jetzt können wir die Hinreichende Bedingung untersuchen:

$$f''(\ln(2)) = 4e^{2\cdot\ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = 4\cdot 4 - 4\cdot 2 > 0 \quad \text{Minimum!}$$

Die y-Koordinate kennen wir schon: $f(\ln(2)) = 0$

Ergebnis: Die Kurve K hat den Tiefpunkt $T(\ln(2)\,|\,0)$.
Oder so formuliert: K berührt die x-Achse in ihrer Nullstelle.

Hinweis: Wir haben schon bei der Entdeckung der doppelten Nullstelle in $\boxed{1}$ festgehalten, dass bei der Nullstelle ein Extrempunkt liegt!

Berechne nun bitte den Wendepunkt von K_k.

$\Rightarrow \boxed{4}$

$\boxed{4}$ Berechnung des Wendepunkts.

Dazu schreibe ich nochmals die Ableitungen auf:

$$f(x) = (e^x - 2)^2 = e^{2x} - 4e^x + 4$$

$$f'(x) = 2\cdot(e^x - 2)\cdot e^x \quad \text{oder} \quad = 2e^{2x} - 4e^x$$

$$f''(x) = 4e^{2x} - 4e^x$$

$$f'''(x) = 8e^{2x} - 4e^x$$

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4e^{2x} - 4\cdot e^x = 0$

Ausklammern von $2e^x$: $\underbrace{4e^x}_{\neq 0}\cdot(e^x - 1) = 0$

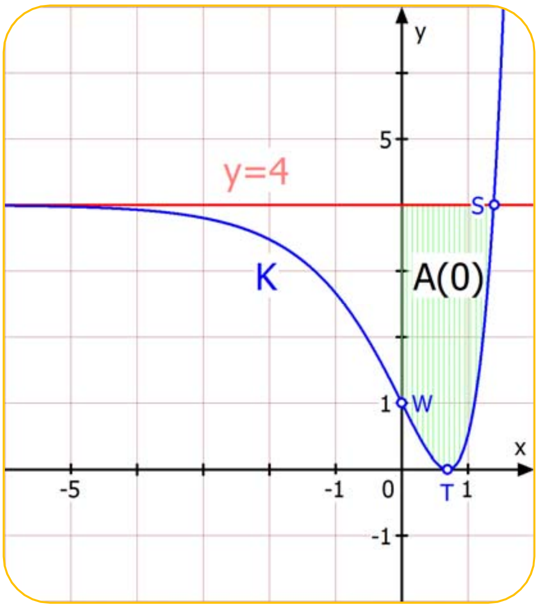
$e^x = 1$ Û $x_W = 0$

Hinreichende Bedingung: $f'''(0) = 8\cdot e^0 - 4\cdot e^0 \neq 0$

y-Koordinate: $y_W = f(0) = (e^0 - 2)^2 = (-1)^2 = 1$

Ergebnis: K hat den Wendepunkt $W(0\,|\,1)$

Damit können wir die Kurve K zeichnen:



Die Kurve hat für $x \to -\infty$ eine

waagrechte Asymptote: $y = 4$

$\boxed{\text{GW}}$ Das beweist man so:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x - 2)^2 = (-2)^2 = 4$$

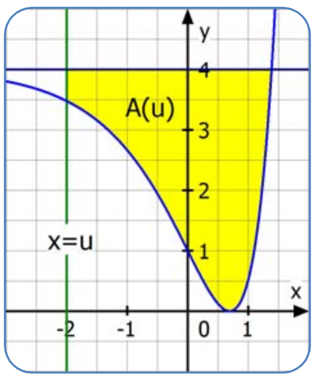
dann es ist ja $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Eine Zusatzaufgabe für dich:

Die Kurve K begrenzt mit der waagrechten Asymptote und der Geraden x = u eine Fläche.

Berechne zuerst deren Inhalt für u = 0

Und dann den Inhalt A(u) für u < ln(4).



Meine Lösung steht in $\Rightarrow$ $\boxed{5}$

5 Flächenberechnung mit einem Integral

GW Die Fläche wird oben von der Geraden y = 4 begrenzt und links von der x-Achse.

Dann macht man den Ansatz:

$$A(0) = \int_{\text{links}}^{\text{rechts}} (\text{obere Kurve minus untere Kurve})\,dx$$

$$A(0) = \int_0^{\ln(4)} \left[4-(e^{2x}-4e^x+4)\right] dx = \int_0^{\ln(4)} (-e^{2x}+4e^x)\,dx$$

Woher habe ich den rechten Rand?

Es ist die Schnittstelle von K und der waagrechten Asymptote:

Schnittgleichung: $e^{2x}-4e^x+4=4$

$e^{2x}-4e^x=0$

e^x ausklammern !!! $e^x\cdot\left(e^x-4\right)=0$ Nullprodukt.

Da $e^x \neq 0$ folgt $e^x-4=0$

Das heißt: $e^x=4$

Die Lösung ist also $x_S=\ln(4)$

Nun brauchen wir die **Stammfunktionen**: $e^{2x} \to \frac{e^{2x}}{2}$ und $4e^x \to 4e^x$.

Damit erhält man den Flächeninhalt so:

$$A(0) = \ldots = \int_0^{\ln(4)} (-e^{2x}+4e^x)\,dx = \left[-\tfrac{1}{2}e^{2x}+4e^x\right]_0^{\ln(4)} \qquad \text{(Stammfunktion)}$$

$$A(0) = \left[-\tfrac{1}{2}e^{2\cdot\ln(4)}+4e^{\ln(4)}\right]-\left[-\tfrac{1}{2}e^0+4e^0\right]$$

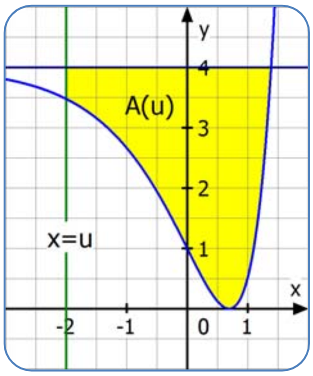
Nun muss man sich erinnern: $e^{\ln(4)}=4$.

Also ist $e^{2\cdot\ln(4)}=\left(e^{\ln(4)}\right)^2=4^2=16$

Ergebnis: $A(0)=\underbrace{\left[-\tfrac{1}{2}\cdot16+4\cdot4\right]}_{=8}-\underbrace{\left[-\tfrac{1}{2}+4\right]}_{3,5}=8-3,5=4,5\ \text{(FE)}$

$\Rightarrow$ 6

6 **Berechnung der Fläche A(u):**



$$A(u)=\int_u^{\ln(4)}\left[4-(e^{2x}-4e^x+4)\right]dx=\int_u^{\ln(4)}(-e^{2x}+4e^x)\,dx$$

$$A(u)=\left[-\tfrac{1}{2}e^{2x}+4e^x\right]_u^{\ln(4)}$$

$$A(u)=\left[-\tfrac{1}{2}\underbrace{e^{2\cdot\ln(4)}}_{=16}+4\underbrace{e^{\ln(4)}}_{=4}\right]-\left[-\tfrac{1}{2}e^{2u}+4e^u\right]$$

$$A(u)=-8+16+\tfrac{1}{2}e^{2u}-4e^u=\boxed{8+\tfrac{1}{2}e^{2u}-4e^u}$$

Hinweis. Man kann eine kleine Kontrolle durchführen:

Wenn man für u die 0 einsetzt, erhält man

$A(0)=8+\frac{1}{2}-4=4{,}5$

Diesen Wert haben wir schon in **5** berechnet:

---

7 Zum Schluss lassen wir u gegen $-\infty$ rücken. Wir verlängern also die Fläche nach links ins Unendliche. Wir gro0 ist dann der Flächeninhalt?

Wir haben $A(u)=8+\frac{1}{2}e^{2u}-4e^u$

Man berechnet jetzt $\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$ und $\lim\limits_{u\to-\infty}e^{2u}=0$

Und damit ist der Grenzwert: $A^*=\lim\limits_{u\to-\infty}A(u)=8$.

Damit sind wir am Ende. Diese Aufgabe ist nicht einfach zu lösen.

Da hilft nur eines: Sicher werden durch zweimaliges Rechnen.

CIAO